

Analysis of systems with internal damping

Analiza układów z tłumieniem wewnętrznym



The problem of modelling material damping in phys. systems was discussed in the case of formulating the equations of motion in the matrix form (used e.g. in finite element method) and for motion systems (mechanisms, rotating systems). A model of material damping matrix was formulated in the case of taking into account the mutual dependence between the vibration motion and global mechanism motion. In order to assess the effect of damping on vibration of mechanical members, a slider crank mechanism was considered.

Keywords: FEM, dynamics of machines, mechanism analysis, material damping

Omówiono zagadnienie zapisu tłumienia materiałowego w układach fizycznych w przypadku sformułowania równań ruchu w postaci macierzowej (np. za pomocą metody elementów skończonych) i dla układów ruchowych (mechanizmy, układy wirujące). Sformułowano model zapisu macierzy tłumienia materiałowego w przypadku uwzględnienia wzajemnej zależności między ruchem drgającym a ruchem zadanym układu. Jako przykład ilustrujący wpływ tłumienia na drgania członów mechanizmu rozpatrzono układ korbowo-wodzikowy mający zastosowanie w maszynach w wielu gałęziach przemysłu.

Słowa kluczowe: MES, dynamika maszyn, analiza mechanizmów, tłumienie materiałowe

Opis zjawisk tarcia wewnętrznego w układach fizycznych jest zagadnieniem skomplikowanym. Dla większości układów ściśle określenie parametrów tłumienia materiałowego jest niemożliwe, ponieważ źródła strat energii są trudne do określenia¹). W ostatnim okresie analiza dynamiczna wielu układów przeprowadzana jest często z zastosowaniem metody elementów skończonych (MES), w której równania ruchu przedstawione są w postaci macierzowej. W takich przypadkach uwzględnienie rozpraszania energii w materiale sprowadza się do odpowiedniego określenia macierzy tłumienia wewnętrznego.

Celem pracy było omówienie zagadnienia zapisu tłumienia materiałowego w układach fizycznych w przypadku sformułowania równań ruchu w postaci macierzowej i dla układów ruchowych. Zwykle zakłada się, że przemieszczenia wynikające z podatności są zmiennymi niezależnymi, natomiast przemieszczenia powstałe w czasie ruchu mechanizmu jako układu ciał sztywnych przyjmuje się jako

znane. W takim ujęciu ruch układu o nieodkształcalnych członach wynika z kinematyki i dynamiki ciał sztywnych, zaś drgania członów nie mają nań wpływu. Przedstawiony sposób analizy nie daje wystarczająco dokładnych wyników w przypadku szybkoobrotowych mechanizmów lub układów wirujących z dużymi prędkościami.

Sposób formowania macierzy tłumienia materiałowego w przypadku uwzględnienia wzajemnej zależności między ruchem drgającym a ruchem zadanym układu jest problemem znacznie bardziej skomplikowanym. W takim przypadku oba rodzaje przemieszczeń (wynikające z ruchu układu jako ciał sztywnych i z podatności) są przyjmowane jako niewiadome (przemieszczenia uogólnione) i podstawiane do równań ruchu. Wyprowadzone w ten sposób równania ruchu są dokładniejsze, gdyż uwzględniają obustronną zależność między ruchem mechanizmu o sztywnych członach a przemieszczeniami spowodowanymi odkształcalnością członów. Ponieważ przemieszczenia mechanizmu jako układu ciał sztywnych stanowią część niewiadomych układu równań, otrzymane równania ruchu są dogodnie do rozwiązywania zarówno dla zadania prostego, jak i odwrotnego.

Część badawcza

Analiza układów ruchowych z tarciami wewnętrznymi z zastosowaniem MES

Równania ruchu

W przypadku zastosowania metody elementów skończonych do analizy dynamicznej układów ruchowych (np.



Dr hab. inż. Michał HAĆ (ORCID: 0000-0001-6301-124X) w roku 1978 ukończył studia na Wydziale Samochodów i Maszyn Roboczych Politechniki Warszawskiej. W 1986 r. uzyskał stopień doktora nauk technicznych, a w 1996 r. stopień doktora habilitowanego na tym samym wydziale. Jest profesorem uczelni w Instytucie Podstaw Budowy Maszyn PW. Specjalność – dynamika maszyn, a w szczególności analiza dynamiczna mechanizmów stosowanych w różnych gałęziach przemysłu.

* Adres do korespondencji:

Wydział Samochodów i Maszyn Roboczych, Politechnika Warszawska, ul. Narbutta 84, 02-574 Warszawa, tel.: (22) 234-86-26, e-mail: michal.hac@pw.edu.pl

mechanizmów) z uwzględnieniem podatności członów, ogólne równanie ruchu w postaci macierzowej można wyrazić zależnością (1)²⁾:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{Q_{ex}\} - [M]\{\ddot{x}_0\} \quad (1)$$

w której $[M]$, $[C]$ i $[K]$ oznaczają macierze odpowiednio bezwładności, tłumienia i sztywności, $\{Q_{ex}\}$ jest wektorem sił zewnętrznych, $\{x\}$, $\{\dot{x}\}$ i $\{\ddot{x}\}$ oznaczają wektory odpowiednio przemieszczeń, prędkości i przyspieszeń układu w ruchu drgającym, a $\{\ddot{x}_0\}$ jest przyspieszeniem wynikającym z ruchu globalnego mechanizmu o sztywnych członach (przyjmuje się jako znane).

Macierz tłumienia przyjmuje się najczęściej w postaci Rayleigha, która jest liniową kombinacją macierzy sztywności i bezwładności (2):

$$[C] = \alpha_1 [K] + \alpha_2 [M] \quad (2)$$

w której α_1 oznacza współczynnik tłumienia wewnętrznego, a α_2 współczynnik tłumienia zewnętrznego.

W przypadku mechanizmów płaskich do opisu przemieszczeń elementu skończonego wynikających z podatności przyjęto belkowy element skończony. Wektor przemieszczeń węzłowych takiego elementu można przedstawić w postaci zależności (3)³⁾:

$$\{\delta\}^T = [u_1, w_1, \Theta_1, u_2, w_2, \Theta_2] \quad (3)$$

w której u_1 , u_2 , w_1 , w_2 oznaczają przemieszczenia wynikające z drgań elementów, a Θ_1 , Θ_2 kąty ugięć w węzłach.

Aby uwzględnić obustronne oddziaływanie między ruchem związanym z małymi przemieszczeniami a ruchem zadanym mechanizmu, wektor współrzędnych uogólnionych występujący w równaniach ruchu powinien zawierać przemieszczenia związane z obydwoma wymienionymi rodzajami ruchów. Wektor przemieszczeń węzłowych można zatem przedstawić w postaci zależności (4):

$$\{s\}^T = [u'_1, w'_1, u_1, w_1, \Theta_1, u'_2, w'_2, u_2, w_2, \Theta_2] \quad (4)$$

w której dodatkowo wprowadzono przemieszczenia u'_1, u'_2, w'_1, w'_2 końców elementu skończonego w kierunku wzdłużnym i poprzecznym, wynikające z ruchu mechanizmu jako układu ciał sztywnych. Między wektorami $\{\delta\}$ i $\{s\}$ zachodzi zależność (5):

$$\{\delta\}^T = [T_1]\{s\} \quad (5)$$

w której macierz transformacji $[T_1]$ jest określona jako (6):

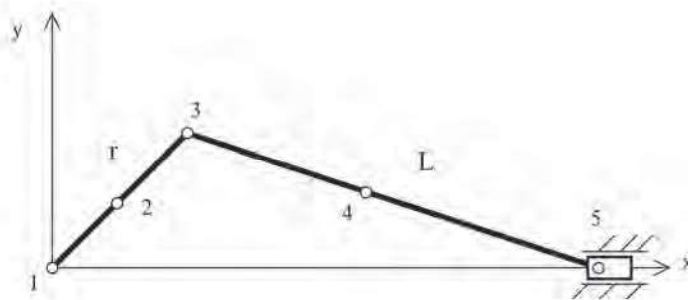


Fig. 1. Slider-crank mechanism

Rys. 1. Układ korbowo-wodzikowy

$$[T_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Wyprowadzając równania ruchu dla elementu skończonego, składając równania elementów zapisane w globalnym układzie współrzędnych oraz uwzględniając warunki brzegowe, otrzymuje się równania ruchu w postaci (7)⁴⁾:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [C_g]\{\dot{x}\} + ([K] + [K_c])\{x\} = \{Q\} \quad (7)$$

w której wektor $\{Q\}$ przedstawia siły uogólnione, $\{\ddot{x}\}$, $\{\dot{x}\}$, i $\{x\}$ przedstawiają wektory odpowiednio przyspieszeń, prędkości i przemieszczeń w punktach węzłowych. Wektor $\{x\}$ jest globalnym wektorem współrzędnych uogólnionych powstałym ze złożenia wektorów $\{s\}$ z uwzględnieniem warunków brzegowych. Macierze $[M]$, $[C_g]$, $[K]$ i $[K_c]$ oznaczają macierz odpowiednio globalną bezwładności, żyroskopową, sztywności i odśrodkową. Należy zauważyć, że ze względu na zawarcie przemieszczeń związanych z ruchem zadanym mechanizmu w wektorze przemieszczeń $\{x\}$ po prawej stronie równania (7) nie występuje wektor związany z przyspieszeniami węzłów układu o nieodkształcalnych członach.

Macierz tłumienia

Macierzy tłumienia $[C]$, ze względu na zawarcie przemieszczeń związanych z ruchem zadanym mechanizmu w wektorze przemieszczeń $\{x\}$, nie można opisać za pomocą wzoru (2). Macierze sztywności i bezwładności występujące w tym wzorze muszą być powiązane z wektorem przemieszczeń $\{\delta\}$ reprezentującym tylko przemieszczenia elementów wynikające z ich podatności. Macierz tłumienia $[C]$ można przedstawić w postaci zależności (8):

$$[C] = \alpha_1 [K_r] + \alpha_2 [M] \quad (8)$$

w której współczynniki α_1 i α_2 oznaczają współczynnik odpowiednio tłumienia wewnętrznego i tłumienia zewnętrznego

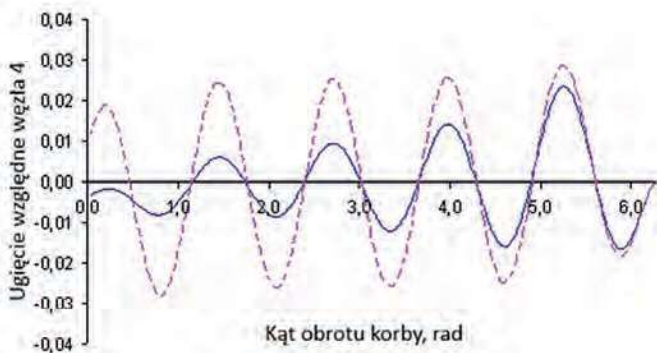


Fig. 2. The course of relative deformations of the connector for the system with internal damping (continuous line) and without damping (dashed line)

Rys. 2. Przebieg odkształceń względnych łącznika dla układu z tłumieniem wewnętrznym (linia ciągła) i bez tłumienia (linia przerywana)

nego, a $[M]$ i $[K]$ globalne macierze otrzymane dla ruchu członów wynikających z podatności.

W przypadku tłumienia materiałowego we wzorze (8) przyjmuje się $\alpha_2 = 0$, a α_1 określa się na podstawie kilku pierwszych częstości własnych układu, przy przyjęciu współczynnika tłumienia w zakresie 0,02–0,03²⁾. Porównując wzory (2) i (8), można zauważyć, że w przypadku uwzględnienia sprzężenia między ruchem globalnym a drganiami członów mechanizmu, równanie przedstawiające macierz tłumienia w formie ogólnie przyjętej w literaturze (2) nie może być zastosowane, gdyż tłumienie wewnętrzne (materiałowe) związane jest wyłącznie z przemieszczeniami węzłów wynikającymi z elastyczności członów.

Przykład numeryczny

W celu oceny wpływu tłumienia materiałowego rozpatrzono układ korbowo-wodzikowy przedstawiony na rys. 1. Analizę dynamiczną układu przeprowadzono dla dwóch przypadków: z uwzględnieniem tłumienia w materiale i przy jego pominięciu. Mechanizm podzielono na 4 elementy belkowe typu Bernoulliego i Eulera³⁾. Uwzględniając jednocześnie przemieszczenia związane z drganiami członów i w ruchu sztywnym układu, wektor przemieszczeń węzłowych $\{x\}$ składa się z 21 elementów: przemieszczeń u i w odpowiednio w kierunku osi X i Y ruchomych węzłów 2, 3, 4, 5 (w węźle 5 przemieszczenia poprzeczne są odebrane, jednak występują one w lokalnym układzie współrzędnych związanym z łącznikiem) oraz kątów ugięcia w węzłach Θ .

Globalne macierze układu (macierze współczynników w równaniu (1)) miały wymiar 21×21 , a macierze $[M]$ i $[K]$ związane z podatnością członów (równanie (8)) miały wymiar 13×13 .

Dane przyjęte do obliczeń (długość, przekrój poprzeczny i moment bezwładności przekroju członów) wynosiły: dla korby 0,1 m, $1,0 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$, $1,8 \cdot 10^{-9} \text{ m}^4$; dla łącznika 0,3 m, $0,4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$, $9,0 \cdot 10^{-9} \text{ m}^4$, moduł Younga $0,71 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$,

gęstość materiału 2710 kg/m^3 . Założono współczynnik proporcjonalności (równanie (8)) $\alpha_2 = 0$, natomiast α_1 wyznaczono na podstawie częstości drgań własnych układu, otrzymując wartość 0,0005. Założono, że korba mechanizmu obraca się ze stałą prędkością kątową wynoszącą 100 rad/s.

Wyniki badań i ich omówienie

Na rys. 2 przedstawiono przemieszczenia względne środka łącznika (czyli stosunek ugięć węzła 4 i długości łącznika) w funkcji kąta obrotu korby, wynikające z uwzględnienia podatności członów dla przypadku układu bez tłumienia materiałowego i z jego uwzględnieniem.

Z przebiegu drgań węzła środkowego łącznika można wywnioskować, że uwzględnienie tłumienia materiałowego istotnie zmniejszyło poziom drgań. Podobne badania przeprowadzone dla węzła środkowego korby wykazały, że jej większa sztywność powodowała powstanie drgań o wyższej częstości i drgania te były silniej tłumione w wyniku uwzględnienia tarcia wewnętrznego w materiale.

Podsumowanie

Analiza układów z tłumieniem wewnętrznym wymaga wielu badań porównawczych. Coraz częściej do rozwiązywania skomplikowanych zagadnień technicznych wykorzystuje się nowoczesne systemy projektowania wykorzystujące metodę elementów skończonych. Równania ruchu układów można wówczas zapisać w postaci macierzowej. W opisie układów ruchowych wzajemne sprzężenie między ruchem mechanizmu jako układu ciał sztywnych a drganiami wynikającymi z uwzględnienia podatności członów wymaga indywidualnego podejścia do sposobu formułowania macierzy tłumienia. Zakres współrzędnych uogólnionych dla macierzy tłumienia jest w takim przypadku inny niż dla globalnych macierzy sztywności i bezwładności układu.

Na podstawie przedstawionej analizy numerycznej można wnioskować, że uwzględnienie tłumienia wewnętrznego w opisie dynamicznym układów ruchowych ma istotne znaczenie na odpowiedź układu i w sposób wyraźny zmienia obraz drgań członów.

Otrzymano: 07-10-2024

Zrecenzowano: 20-11-2024

Zaakceptowano: 26-11-2024

Opublikowano: 20-12-2024

LITERATURA

- [1] Z. Osiński (red.), *Tłumienie drgań*, PWN, Warszawa 1997.
- [2] S. Nagarajan, D.A. Turcic, *ASME J. Mech. Design* 1992, **114**, 131.
- [3] M. Kleiber, *Wprowadzenie do metody elementów skończonych*, PWN, Warszawa-Poznań 1989.
- [4] M. Hać, *Machine Dynamics Probl.* 1996, **14**, 7.